

Линейная алгебра.

Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений.

2.1 Решение систем линейных уравнений.

§1. Формулы Крамера

1. Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы};$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель для } x_1;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} - \text{вспомогательный определитель для } x_2.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad \Delta \neq 0$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}} \quad -$$

формулы Крамера.

Пример:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 = 7 \end{cases}$$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 10$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 2$$

Ответ : (1; 2)

Замечание:

- 1) $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение $(x_1; x_2)$
- 2) $\Delta = 0$; $\Delta_{x_i} \neq 0$; $i = 1, 2$ – система не имеет решения
- 3) $\Delta = \Delta_{x_i} = 0$ – система имеет бесконечное множество решений

2. Аналогично решается система 3-х линейных уравнений с тремя неизвестными.

§2. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В основе метода Гаусса лежит последовательное исключение неизвестных. С

помощью элементарных преобразований, система уравнений приводится к ей равносильной ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находят все остальные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

- 1) система приводится к треугольному виду, то она имеет единственное решение
- 2) система приводится к трапециoidalному виду, то она имеет бесконечное множество решений.

3) В результате элементарных преобразований появится уравнение вида:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$$

система решений не имеет.

Пример 1: Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (-1) \quad (-5) \\ \searrow \quad \searrow \quad \searrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 5 & -3 & 2 & | & 5 \\ 1 & 3 & 3 & | & 18 \end{pmatrix} \sim (-2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 17 & | & 17 \end{pmatrix}$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & x_1 - 4 + 2 = 1 & \underline{x_1 = 3} \\ 2x_2 - 8x_3 = 0 & 2x_2 - 8 \cdot 1 = 0 & 2x_2 = 8 & \underline{x_2 = 4} \\ 17x_3 = 17 & & & \underline{x_3 = 1} \end{cases}$$

Ответ: (3, 4, 1)

Пример 2. Пусть система приводится к виду трапеции:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - x_3 \\ x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases} \sim \text{обозначим}$$

$$x_3 = C \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - C \\ x_2 = 3 - 2C \end{cases}$$

Имеем: $x_2 = 3 - 2C$; $x_1 + (3 - 2C) = 1 - C = -2 + C$

Итак: $\begin{cases} x_1 = -2 + C \\ x_2 = 3 - 2C \\ x_3 = C \end{cases}$ $(-2+C; 3-2C; C)$ -общее решение

При $C = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ находим бесконечное множество конкретных решений.

§3. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда первую часть этой системы можно будет представить в виде произведения двух

матриц, а всю систему можно записать в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$.

Чтобы решить это матричное уравнение, нужно обе части **слева** умножить на A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Замечание: Матричным методом можно решать систему уравнений, если матрица A невырожденная.

Пример: Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 33 + (-1) \cdot 24 + 1 \cdot (-8) \\ (-38) \cdot 33 + 41 \cdot 24 - 34 \cdot (-8) \\ 27 \cdot 33 - 29 \cdot 24 + 24 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ОТВЕТ: (1; 2; 3)

2.2 Исследование систем линейных уравнений.

§4. Теорема Кронекера - Капелли.

Рассмотрим общий случай исследования неоднородной системы линейных уравнений: m уравнений и n неизвестных

[illegible]

Решением такой системы будем называть
совокупность таких число-вых значений для
неизвестных $(x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_n = c_n)$, которые
удовлетворяют всем уравнениям системы, т.е.
обращают их в тождества:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$$

Сформулируем теорему о совместимости системы линейных уравнений (без доказательства).

Теорема 1. (теорема Кронекера-Капелли) (1823-1891 немецкий математик, 1855-1910 итальянский математик).

Для того чтобы система линейных уравнений была сов-местна , необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы B , т.е. $r(A) = r(B)$. При этом возможны два частных случая:

- 1) Если ранг матрицы A равен рангу матрицы B и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение: $r(A) = r(B) = n$;
- 2) Если ранг матрицы A равен рангу матрицы B , но мень-ше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество различных решений: $r(A) = r(B) < n$.

Замечание. Если то система имеет единственное решение: $r(A) \neq r(B)$, то система линейных уравнений несовместна и не имеет решений.

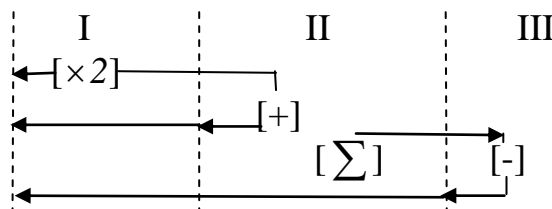
Пример 1. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases}$$

Решение. 1. Составим матрицу A и найдем $r(A)$:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



2) Миноры третьего порядка $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$. Следовательно, $r(A) < 3$.

3) Умножим 1-ю строку на 2, сложим со 2-ой и эту сумму вычтем из 3-ей, получим

$$A' \underset{(\text{экв.})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

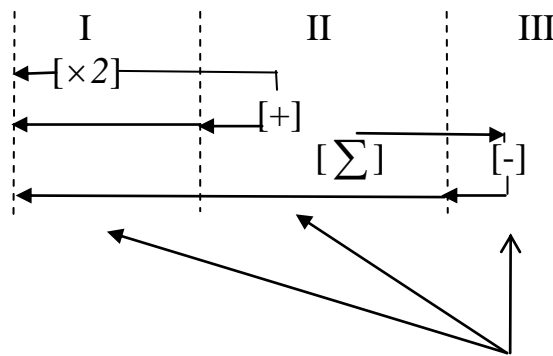
Легко убедиться, что миноры 2-го порядка не равны нулю.

Отсюда $r(A')=2$, а значит и $r(A) = 2$

2. Составим матрицу B и найдем $r(B)$:

1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$



2) Выполним те же преобразования

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Delta_4 = \mu_4 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 33 \neq 0$$

Отсюда $r(B)=3 \neq r(A)=2$.

Следовательно, данная система несовместна, т.е. *не имеет* решений.

§5. Системы линейных однородных уравнений.

В общем случае однородная система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна .

Это следует из теоремы Кронекера-Капелли, а также очевидно, что $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$, является решением системы.

Это решение называется нулевым или тривиальным .

Для однородной системы важно установить, имеет ли она *ненулевое* решение. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы однородная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был меньше числа неизвестных: $r(A) < n$.

Следствие 1. Если в однородной системе число неизвестных n больше числа уравнений m , то система, помимо нулевого решения, обладает ещё и ненулевым.

Следствие 2. Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладала и ненулевыми решениями необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю определитель системы.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

А. Исследование системы

Решение. 1. Найдем $r(A)$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 14 & -13 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating row operations:

- Row 1 is labeled I.
- Row 2 is transformed by $[x(-3)]$ (multiplied by -3).
- Row 3 is transformed by $[+]$ (added to Row 1).
- Row 4 is transformed by $[+]$ (added to Row 1).
- The resulting matrix is $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 15 & -9 \end{pmatrix}$.
- Row 4 is transformed by $[\Sigma]$ (sum of rows 1, 2, and 3).
- The final matrix is $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 15 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Сложим 3-ю и 4-ю строки и эту сумму вычтем из 2-ой строки, умноженной на 3 (или сложим со 2-ой, умноженной на -3), получим

$$A' \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 14 & -13 \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. } r(A) < 4.$$

Отсюда $r(A) = 3$, так как минор 3-го порядка

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -27, \quad \text{т.е. } r(A) = 3 < n = 4.$$

Следовательно, система имеет и ненулевые решения.

Замечание. Исходная система (23) эквивалентна системе (24), которая составлена на основании выбранного минора. Конечно, можно было взять и другой минор матрицы A , если бы проделать другие преобразования над ней при определении ранга.

В. Решение системы.

2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 13x_4 = 0 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = t$, где t - параметр, принимающий произвольное числовое значение. Решим полученную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, например, по формулам Крамера.

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = -t$$

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = -4t$$

$$2x_1 + 5x_2 + 14x_3 = -13t$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix} = -27, \quad \Delta_{\tilde{o}_1} = \begin{vmatrix} -t & - & -2 \\ -4t & -2 & -1 \\ -13t & 5 & 14 \end{vmatrix} = -48t$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & -t & -2 \\ 4 & -4t & 1 \\ 2 & -13t & 14 \end{vmatrix} = -135t, \quad \Delta_{\tilde{o}_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -t \\ 4 & -2 & -4t \\ 2 & 5 & -13t \end{vmatrix} = 30t$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{16}{9}t, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = 5t,$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = -\frac{10}{9}t, \quad x_4 = t$$

Путем подстановки этого решения во все четыре уравнения системы легко убедиться, что система решена правильно.